

3 Gleichungen

3.1 Lineare Gleichungen

$$ax + b = cx + d$$

Ziel ist es zunächst je alle Terme mit x auf der einen Seite zu sammeln. Dann wird die Gleichung durch Dividieren nach x aufgelöst.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} ax &= cx + d - b \\ ax - cx &= d - b \\ (a - c)x &= d - b \\ x &= \frac{d - b}{a - c} \end{aligned}$$

Im folgenden Link können einfache Gleichungen gelöst werden.

<http://www.zum.de/dwu/depothp/hp-math/hpmsgl17.htm>

3.2 Bruchgleichungen

Im Folgenden seien die Nenner je ungleich Null. $a, b, c, d, f \in \mathbb{R}$

Am einfachsten sind Bruchgleichungen der Form:

$$\frac{ax + b}{cx + d} = f$$

Da links ein Bruch steht und rechts eine Zahl kann man die Gleichung mit dem Nenner multiplizieren und erhält eine lineare Gleichung.

Wie sieht hier dann die Lösung für x aus?

Bei einer Gleichung

$$\frac{3}{2x - 1} = \frac{4}{7}$$

kann man auf beiden Seiten je den Bruch umkehren und erhält dann

$$\frac{2x - 1}{3} = \frac{7}{4}$$

Ziel bei Bruchgleichungen ist es immer, den Nenner wegzubringen. Allerdings sollte möglichst vorher alles was man zusammenfassen kann auch zusammengefasst werden.

$$\frac{3x}{2} - \frac{x}{3} = 5$$

sollte zu

$$\frac{6x - 2x}{6} = 5$$

auf der linken Seite zusammengefasst werden. Alternativ kann auch gleich die ganze Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert werden.

3.3 Gleichungen mit Wurzeln

Ähnlich wie bei den Bruchgleichungen muss die Wurzel aufgelöst werden.

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-1} &= 9 \\ 2x-1 &= 81 \\ 2x &= 82 \\ x &= 41\end{aligned}$$

Gleichungen lassen sich auch leicht lösen, wenn auf beiden Seiten eine Wurzel steht.

$$\sqrt{3x-1} = \sqrt{7-x}$$

Da der Term unter der Wurzel gleich sein muss, lösen wir hier nur eine lineare Gleichung. Was ändert sich wenn rechts vor der Wurzel noch eine Zahl steht?

$$\sqrt{3x-1} = 2 \cdot \sqrt{7-x}$$

Übung 3.3:

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen:

1. $\frac{3x-5}{9} = 1$
2. $\frac{4x+1}{1-x} = 2$
3. $\sqrt{12-3x} = \sqrt{6x}$
4. $\frac{\sqrt{2x-1}}{4} = \sqrt{x+1}$
5. $\frac{a}{x-1} = \frac{c}{d}$

3.4 Quadratische Gleichungen

Ist das ein Beweis, dass $3 = 4$ gilt? Sei $x=3$ und $y=4$. Dann gilt

$$\begin{aligned}x+y &= 7 \\ (x+y)(x-y) &= 7(x-y) \\ x^2-y^2 &= 7x-7y \\ x^2-7x+\frac{49}{4} &= y^2-7y+\frac{49}{4} \\ \left(x-\frac{7}{2}\right)^2 &= \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 \\ x-\frac{7}{2} &= y-\frac{7}{2} \\ x &= y \\ 3 &= 4\end{aligned}$$

Wo wurde hier mathematisch geschummelt?

Warum hat die Gleichung

zwei Lösngen?

$$\begin{aligned}x^2 &= 20 \\x &= \pm\sqrt{20}\end{aligned}$$

Da das Quadrat einer negativen Zahl positiv ist, gibt es beim Wurzelziehen zwei Lösungen.
Die p-q- Formel zu $x^2 + px - q = 0$:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die abc-Formel zu $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Übung 3.4:

Berechnen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}$, wählen Sie je das geeignete Vorgehen.

1. $x^2 + x - 6 = 0$
2. $2x^2 + 2^{\frac{3}{2}}x = 0$
3. $4x^2 - 12x - 16 = 0$
4. $-2x^2 - 28x - 98 = 0$
5. $x^2 + 2x + 6 = 0$

3.5 Ungleichungen

Ungleichungen werden von den Lösungsstrategien wie Gleichungen behandelt, nur beim Multiplizieren bzw. Dividieren mit einer negativen Zahl muss das Ungleichzeichen umgedreht werden.

$$\begin{aligned}-3x - 2 &< 10 \\-3x &< 12 \\x &> -4\end{aligned}$$

Daher muss man bei Bruchgleichungen mit x im Nenner unterscheiden, ob der Nenner positiv oder negativ ist.

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x+2} &> 1 \\1.Fall : (x+2) &> 0 \Leftrightarrow x > -2 \\2x-1 &> x+2 \\x-1 &> 2 \\x > 3 \wedge x &> -2 \Rightarrow x > 3 \\2.Fall : (x+2) &< 0 \Leftrightarrow x < -2 \\2x-1 &< x+2 \\x-1 &< 2\end{aligned}$$

Übung 3.5:

1. $3x - 4 < 9$

2. $\frac{6x-24}{x-4} > 4$

3. $x^2 - 5 > 2$

4. $\frac{3x-2}{-5x+2} < 1$

Ein Rätsel zum Schluss

Ein Bettler geht in die Kirche und betet: "Lieber Gott, bitte verdopple das wenige Geld, dass ich bei mir habe! Als Dank werde ich auch 16 Euro spenden!"

Das Wunder geschieht und der Bettler spendet wie versprochen die 16 Euro.

Weil es tatsächlich funktioniert hat, beschließt der Bettler es noch einmal zu wiederholen - wieder funktioniert es und er spendet weitere 16 Euro.

Vor lauter Freude wiederholt er seine Bitte zum dritten Mal und hat wieder Erfolg.

Nachdem er das dritte Mal 16 Euro gespendet hat verlässt er die Kirche ohne Geld.

Wie viel Geld hatte der Bettler bei sich, als er die Kirche betrat?